**Chuyên đề tìm GTLN, GTNN**

**(Dành cho bồi d­ỡng HSG lớp 8)**

**1. Khái niệm về cực trị của một biểu thức**

 **Cho biểu thức nhiều biến số P(x, y, ..., z) với x, y, ..., z thuộc miền S nào đó xác định. Nếu với bộ giá trị của các biến (x0, y0, ...z0)  S mà ta có: P(x0, y0, ...z0)  P(x, y, ..., z) hoặc P(x0, y0, ...z0)  P(x, y, ..., z) thì ta nói P(x, y, ..., z) lớn nhất hoặc nhỏ nhất tại (x0, y0, ...z0) trên miền S.**

 **P(x, y, ..., z) đạt giá trị lớn nhất tại (x0, y0, ...z0)  S còn gọi là P đạt cực đại tại (x0, y0, ...z0) hoặc Pmax tại (x0, y0, ...z0). T­ơng tự ta có: P đạt giá trị nhỏ nhất tại (x0, y0, ...z0)  S còn gọi là P đạt cực tiểu tại (x0, y0, ...z0) hoặc Pmin tại (x0, y0, ...z0).**

 **Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của P trên miền xác định S gọi là các cực trị của P trên miền S.**

 **2. Nguyên tắc chung tìm cực trị của một biểu thức**

 **Tìm cực trị của một biểu thức trên một miền xác định nào đó là vấn đề rộng và phức tạp, nguyên tắc chung là:**

 **\*) Để tìm giá trị nhỏ nhất của một biểu thức P(x, y, ..., z) trên miền xác định S, ta cần chứng minh hai b­ớc:**

 **- Chứng tỏ rằng P  k ( với k là hằng số ) với mọi giá trị của các biến trên miền xác định S**

 **- Chỉ ra tr­ờng hợp xảy ra dấu đẳng thức.**

 **\*) Để tìm giá trị lớn nhất của một biểu thức P(x, y, ..., z) trên miền xác định S, ta cần chứng minh hai b­ớc:**

 **- Chứng tỏ rằng P  k ( với k là hằng số ) với mọi giá trị của các biến trên miền xác định S**

 **- Chỉ ra tr­ờng hợp xảy ra dấu đẳng thức.**

 ***Chú ý rằng không đ­ợc thiếu một b­ớc nào trong hai b­ớc trên*.**

**Ví dụ: *Cho biểu thức* A = x2 + (x - 2)2**

**Một học sinh tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A nh­ sau:**

**Ta có x2  0 ; (x - 2)2  0 nên A  0.**

**Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng 0.**

**Lời giải trên có đúng không?**

**Giải:**

 **Lời giải trên không đúng. Sai lầm của lời giải trên là mới chứng tỏ rằng A0 nh­ng ch­a chỉ ra đ­ợc tr­ờng hợp xảy ra dấu đẳng thức. Dấu đẳng thức không xảy ra, vì không thể có đồng thời:**

 **x2 = 0 và (x - 2)2 = 0 .**

 **Lời giải đúng là:**

 **A = x2 + (x - 2)2 = x2 + x2 - 4x +4 = 2x2 - 4x + 4**

 **= 2(x2 -2x - +1) + 2 = 2(x - 1)2 + 2**

 **Ta có: (x - 1)2  0 , x**

 ** 2(x - 1)2 + 2  2 x**

 ** A  2 x**

 **Do đó A = 2  x = 1.**

 **Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức A bằng 2 với x = 1.**

 **3. Kiến thức cần nhớ:**

 **Để tìm cực trị của một biểu thức đại số, ta cần nắm vững:**

 **a) Các tính chất của bất đẳng thức, các cách chứng minh bất đẳng thức.**

 **b) Sử dụng thành thạo một số bất đẳng thức quen thuộc:**

**\* a2  0, tổng quát: a2k  0 (k nguyên d­ơng)**

 **Xảy ra dấu đẳng thức  a = 0**

**\* -a2  0, tổng quát: -a2k  0 (k nguyên d­ơng)**

 **Xảy ra dấu đẳng thức  a = 0**

**\* . (Xảy ra dấu đẳng thức  a = 0)**

**\* . (Xảy ra dấu đẳng thức  a = 0)**

**\*  (Xảy ra dấu đẳng thức  ab 0)**

**\*  (Xảy ra dấu đẳng thức  a b 0 hoặc a  b 0)**

**\*  , a >0 và  , a <0**

**\*  a,b (Xảy ra dấu đẳng thức  a = b)**

**\*  (Xảy ra dấu đẳng thức  a = b)**

**II - các biện pháp thực hiện**

***(Một số dạng bài toán cực trị trong đại số)***

 **Thông qua các bài toán trong sách giáo khoa (sách tham khảo) tôi tiến hành phân loại thành một số dạng cơ bản nhất về các bài toán cực trị trong đại số ở THCS rồi h­ớng dẫn học sinh tìm kiến thức có liên quan cần thiết để giải từng dạng toán đó. Sau đây là một số dạng cơ bản th­ờng gặp:**

***Dạng 1*: bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của một biểu thức là tam thức bậc hai.**

***Ví dụ 1*: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức.**

 **A(x) = x2- 4x+1**

 **Trong đó x là biến số lấy các giá trị thực bất kỳ.**

**H­ớng dẫn giải:**

**Gợi ý: Để tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A(x) ta cần phải biến đổi về dạng A(x)k (k là hằng số) với mọi giá trị của biến và chỉ ra tr­ờng hợp xảy ra đẳng thức**

 **Lời giải: A(x) = x2- 4x+1**

 **= x2- 2.2x+1**

 **= (x2- 2.2x+4)- 3**

 **= (x- 2)2- 3**

**Với mọi giá trị của x: (x - 2)2 0 nên ta có:**

 **A(x) = (x- 2)2- 3-3**

**Vậy A(x) đạt giá trị nhỏ nhất bằng -3 khi x=2**

 **Đáp số: A(x)nhỏ nhất = - 3 với x=2**

 ***Ví dụ 2*: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức**

**B(x) = -5x2- 4x+1**

**Trong đó x là biến số lấy giá trị thực bất kỳ**

**H­ớng dẫn giải:**

**Gợi ý: Để tìm giá trị lớn nhất của biểu thức B(x) ta cần phải biến đổi đ­a B(x) về dạng B(x) k (k là hằng số) với mọi giá trị của biến khi đó giá trị lớn nhất của B(x)= k và chỉ ra khi nào xảy ra đẳng thức**

**Lời giải: B(x) = -5x2 – 4x+1**

 ****

 ****

 ****

 ****

 ****

**Với mọi giá trị của x:  nên **

**suy ra: B(x)= **

**Vậy B(x)đạt giá trị lớn nhất khi B(x)= , khi x = **

**Đáp số: B(x)lớn nhất =  với x =**

 ***Ví dụ 3: (Tổng quát)***

**Cho tam thức bậc hai P = ax2 +bx + c**

**Tìm giá trị nhỏ nhất của P nếu a > 0**

 **Tìm giá trị lớn nhất của P nếu a < 0**

**H­ớng dẫn giải:**

**Gợi ý: Để tìm giá trị nhỏ nhất (lớn nhất) của P ta cần phải biến đổi sao cho P = a.A2(x) + k. Sau đó xét với từng tr­ờng hợp a>0 hoặc a<0 để tìm giá trị nhỏ nhất hoặc lớn nhất.**

**Lời giải:**

 **P = a.A2(x) + k**

 **= a (x2 + x) + c**

 ****

 ** với **

 **Do  nên:**

**+Nếu a>0 thì  do đó P  k**

**+Nếu a<0 thì  do đó P  k**

**Vậy khi  thì P có giá trị nhỏ nhất bằng k (nếu a>0)**

**hoặc giá trị lớn nhất bằng k (nếu a<0)**

***Dạng 2*: bài toán tìm giá trị nhỏ nhất,giá tri lớn nhất của đa thức bậc cao:**

***Ví dụ4:***

 **Tìm giá trị nhỏ nhất của A = (x2 + x + 1)2**

**H­ớng dẫn giải:**

**(?) *Ta nhận thấy A = (x2 + x + 1)2*  *0, nh­ng giá trị nhỏ nhất của A có phải bằng 0 hay không? Vì sao?***

**Trả lời : Mặc dù A  0 nh­ng giá trị nhỏ nhất của A không phải bằng 0 vì: x2 + x +1 ≠ 0**

**Do đó Amin  (x2 + x +1)min**

**(?) *Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của x2 + x +1? và tìm giá trị nhỏ nhất của A?***

**Trả lời: Ta có x2 + x +1 = **

 ****

**Vậy giá trị nhỏ nhất của x2 + x + 1 bằng  với **

**Trả lời: Giá trị nhỏ nhất của A bằng  với **

***Ví dụ 5:***

 **Tìm giá trị nhỏ nhất của**

**x4 – 6x3 + 10x2 – 6x + 9**

**H­ớng dẫn giải:**

**Gợi ý: -Hãy viết biểu thức d­ới dạng A2(x) + B2(x)  0**

 **-Xét xem xảy ra dấu đẳng thức khi nào? Giá trị nhỏ nhất của biểu thức bằng bao nhiêu?**

 **Lời giải: x4 - 6x3 + 10x2 - 6x +9**

 **= x4 - 2.x2.3x + (3x)2 + x2 - 2x.3 +32**

**= (x2 - 3x)2 + (x - 3)2  0**

**Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi:**

 **x2–3x = 0 x(x-3) = 0 x = 0**

 **  x = 3  x = 3**

 **x – 3 = 0 x – 3 = 0 x = 3**

**Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức bằng 0 với x = 3**

 **Đáp số: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức bằng 0 với x = 3**

***Dạng 3*: bài toán Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của đa thức có chứa dấu giá trị tuyệt đối**

***Ví dụ 6:* Tìm giá trị nhỏ nhất của A =  x - 1 + x - 3**

**H­ớng dẫn giải:**

**Gợi ý: Bài toán đề cập tới dấu giá trị tuyệt đối do đó chúng ta phải nghỉ tới các khoảng nghiệm và định nghĩa giá trị tuyệt đối của một biểu thức.**

 **A Nếu A  0**

**A =**

 **- A Nếu A  0**

 **Cách 1: Để tìm giá trị nhỏ nhất của A, ta tính giá trị của A trong các khoảng nghiệm. So sánh các giá trị của A trong các khoảng nghiệm đó để tìm ra giá trị nhỏ nhất của A.**

**Lời giải**

 **+ Trong khoảng x < 1 thì x - 2 = - (x -2) = 2 - x**

 **x - 5 = - (x - 5) = 5 - x**

 ** A = 2 - x + 5- x = 7 - 2x**

**Do x < 2 nên -2x > -4 do đó A = 7 - 2x >3**

 **+ Trong khoảng 2  x  5 thì x - 2 = x - 2**

 **x - 5 = - (x - 5) = 5 - x**

** A = x - 2 + 5 - x = 3**

 **+ Trong khoảng x > 5 thì x - 2 = x - 2**

 **x - 5 = x - 5**

** A = x - 2 + x - 5 = 2x - 7**

**Do x > 5 nên 2x > 10 do đó A = 2x – 7 > 3**

**So sánh các giá trị của A trong các khoảng trên, ta thấy giá trị nhỏ nhất của A bằng 3 khi và chỉ khi 2  x  5**

 **Đáp số: Amin = 3 khi và chỉ khi 2  x  5**

 **Cách 2: Ta có thể sử dụng tính chất: *giá trị tuyệt đối của một tổng nhỏ hơn hoặc bằng tổng các giá trị tuyệt đối.*Từ đó tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A.**

**Lời giải: A = x - 2+= x - 2+**

 **Ta có: x - 2 + 5 - xx - 2 + 5 - x = 3**

 **x - 2  0**

 **A = 3   (x - 2) (5 - x)  0**

 **5 - x  0**

 ** 2  x  5**

**Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng 3 khi và chỉ khi 2  x  5**

**dạng 4: Bài toán Tìm gtnn, gtln của phân thức có tử là hằng số, mẫu là tam thức bậc hai**

 ***Ví dụ 7:* Tìm giá trị lớn nhất của**

**H­ớng dẫn giải:**

**Gợi ý: Sử dụng tính chất a  b, ab >0  hoặc theo quy tắc so sánh hai phân số cùng tử, tử và mẫu đều d­ơng.**

**Lời giải:**

**Xét M =  =  = **

**Ta thấy (2x - 1)2  0 nên (2x - 1)2 + 4  4**

**Do đó: **

**Trả lời: Vậy M lớn nhất bằng  khi 2x – 1 = 0 => x = **

**Đáp số: Mlớn nhất=  với x = **

***Ví dụ 8:* Tìm giá trị nhỏ nhất của **

**H­ớng dẫn giải:**

**Ta có: B =  =  = **

**Vì (x - 1)2  0 => (x + 1)2 + 3  3**

**=>  => - **

 **Vậy B nhỏ nhất bằng  khi x – 1= 0 => x =1**

**Đáp số: Mnhỏ nhất =  với x = 1**

**Chú ý: Khi gặp dạng bài tập này các em th­ờng xuyên lập luận rằng M (hoặc B) có tử là hằng số nên M (hoặc B) lớn nhất (nhỏ nhất) khi mẫu nhỏ nhất (lớn nhất)**

 **Lập luận trên có thể dẫn đến sai lầm, chẳng hạn với phân thức **

**Mẫu thức x2 - 3 có giá trị nhỏ nhất là -3 khi x = 0**

**Nh­ng với x = 0 thì  không phải là giá trị lớn nhất của phân thức**

**Chẳng hạn với x = 2 thì **

**Nh­ vậy từ -3 < 1 không thể suy ra - **

**Vậy từ a < b chỉ suy ra đ­ợc  khi a và b cùng dấu .**

***dạng 5*:Bài toán Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của phân thức có mẫu là bình ph­ơng của nhị thức**

***Ví dụ 9* Tìm giá trị nhỏ nhất của **

**Cách 1:**

**Gợi ý: Hãy viết tử thức d­ới dạng lũy thừa của x + 1, rồi đổi biến bằng cách viết A d­ới dạng tổng các biểu thức là lũy thừa của . Từ đó tìm giá trị nhỏ nhất của A.**

**Lời giải: Ta có: x2 + x + 1 = (x2 + 2x + 1) - (x +1) + 1**

 **= (x + 1)2 - (x + 1) + 1**

 **Do đó A = **

 **Đặt  khi đó biểu thức A trở thành: A = 1 - y + y2**

**Ta có: A = 1 - y + y2 = y2 – 2.y.  + ()2 + **

 **=  +   **

 **Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng  khi và chỉ khi:**

****

 ** x + 1 = 2**

 ** x = 1**

 **Đáp số: Anhỏ nhất =  khi x = 1**

**Cách 2:**

***Gợi ý*: Ta có thể viết A d­ới dạng tổng của một số với một biểu thức không âm. Từ đó tìm giá trị nhỏ nhất của A.**

**Lời giải:**

****

****

****

****

 ** (vì )**

**Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng  khi x-1=0  x=1**

**Đáp số: Anhỏnhất=  khi x=1**

***dạng 6*: bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của một biểu thức đại số bằng cách đ­a về dạng  (hoặc  )**

***Ví dụ 10:***

 **Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: **

 **(Với x thuộc tập hợp số thực)**

**H­ớng dẫn giải:**

**Gợi ý: Từ M(x) = ta có:**

**M(x) =  = **

 **(?)  *Ta có thể chia cả tử thức và mẫu thức của biểu thức cho x2 + 2x + 3 đ­ợc không? Vì sao?***

**Trả lời: Vì x2 + 2x + 3 = x2 + 2x + 1 + 2 = (x+1)2 > 0 với mọi giá trị của x. nên sau khi chia cả tử và mẫu cho x2 + 2x + 3 ta đ­ợc**

**M(x) = **

 **(?) *Bài toán xuất hiện điều gì mới?***

**Trả lời: Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của biểu thức **

 **(?)  *Hãy tìm giá trị lớn nhất của*  *từ đó suy ra giá trị lớn nhất của M(x)***

**Trả lời: Vì (x+1)2  0 Với mọi x**

**Nên (x+1)2 + 2  2 với mọi x**

**Do đó **

**Từ đó ta có:**

****

**Dấu “=” xảy ra khi x+1=0 hay x=-1**

**Vậy giá trị lớn nhất của M(x) =  khi và chỉ khi x=-1**

**Đáp số: M(x)Lớn nhất = với x = -1**

**Email: diepngoc0307@gmail.com**

**http://dangngocduong.violet.vn**